



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE INFORMÁTICA
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

por

Raul Renner Martins de Sá

Trabalho de Conclusão de Curso

Bacharelado em Matemática Computacional

Prof. Dr. André Jacomel Torii
Orientador

João Pessoa, junho de 2017.

RAUL RENNER MARTINS DE SÁ

SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

Monografia de conclusão de curso
apresentada ao Curso de Bacharelado em
Matemática Computacional, do Centro de
Informática da Universidade Federal da
Paraíba como requisito à conclusão do
curso.

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii.

João Pessoa - PB

2017

Ficha Catalográfica elaborada por
Rogério Ferreira Marques CRB15/690

S111s

Sá, Raul Renner Martins de.

Soluções de referência para a equação da onda unidimensional /
Raul Renner Martins de Sá. – João Pessoa, 2017.
57p. : il.

Monografia (Bacharelado em Matemática Computacional) –
Universidade Federal da Paraíba - UFPB.
Orientador: Prof^o. Dr. André Jacomel Torri.

1. Equações e sistemas diferenciais. 2. Equação da onda. 3.
Diferenças finitas. 4. Matemática computacional. I. Título.

UFPB/BSCI

CDU: 517.926 (043.2)



CENTRO DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 14 dias do mês de **Junho** de 2017, às 15:00 horas, em sessão pública no **Auditório do Centro de Informática** da Universidade Federal da Paraíba, na presença da banca examinadora presidida pelo professor orientador **André Jacomel Torii** e pelos professores **Sérgio de Carvalho Bezerra** e **Jairo Rocha de Faria**, o aluno **Raúl Renner Martins de Sá**, apresentou o trabalho de conclusão de curso intitulado: **Soluções de Referência para a Equação da Onda Unidimensional e Comparção Numérica** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de **Bacharelado em Matemática Computacional**.

Após a exposição oral, o candidato foi arguido pelos componentes da banca que reuniram-se reservadamente, e decidiram, APROVAR a monografia, com nota 9,5. Divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes, eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.



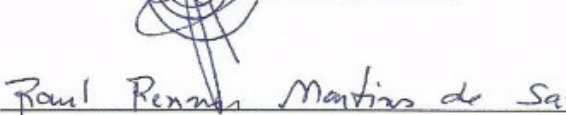
André Jacomel Torii



Sérgio de Carvalho Bezerra



Jairo Rocha de Faria



Raúl Renner Martins de Sá

“Quando o querer é completo, o trabalho se torna um lazer.”

Santo Agostinho

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a felicidade de viver uma vocação religiosa através da Comunidade Católica Shalom como Comunidade de Aliança; por me fazer um homem feliz; estudar e trabalhar com o que gosto; e ter a plena convicção de tudo que vivo é Sua graça.

Ao meu professor orientador André Jacomel Torii, por esses semestres de muito trabalho, paciência e humildade. Humildade que muitas vezes não vemos na academia. A todos os professores que passaram pela minha vida, desde a infância, em especial os do Departamento de Computação Científica e demais do CI: Waldir, Andrea, Kely, Ana, Jairo, Bruno, Moisés, Miguel, Derzu, Thaís, Filipe, Liliane, Gilberto, entre outros, e ao professor Quirino coordenador do curso. Cada um tem sua parcela especial na minha formação.

A minha família, começando pelos meus pais que sempre me incentivaram e fizeram de tudo para que eu fizesse aquilo que acreditava. A minha família aqui em João Pessoa que sempre foi minha base para a universidade. E a todos os outros familiares que sempre me ajudaram em tudo. Prefiro não citar nome de ninguém pra acabar não esquecendo, mas vou citar sobrenomes: Martins, Sá, Sousa, Gomes, Florêncio.

Aos amigos que fiz na vida, na universidade. Em especial, Romulo, Nailza, Diego por estarmos sempre juntos nas disciplinas; aos que não pagaram tantas disciplinas comigo, mas os corredores, CAs e mesas para conversa nos fizeram amigos. E aos que não são mais do curso, mas que estarão para sempre em minhas orações.

Por fim e mais uma vez, gratidão a Deus por tudo e todos que Ele colocou na minha vida.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iii
LISTA DE FIGURAS	vi
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1 INTRODUÇÃO	1
2 PROBLEMA DE REFERENCIA COM CONDIÇÕES DE CON- TORNO DE DIRICHLET	3
2.1 Solução Analítica	5
2.2 Solução do Problema A	7
2.3 Solução do Problema B	10
3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET	13
4 PROBLEMA DE REFERÊNCIA COM CONDIÇÃO DE CON- TORNO DE NEUMANN DEPENDENTE DO TEMPO	15
4.1 Solução Analítica	17
4.2 Solução do Problema A	19
4.3 Solução do Problema B	24
5 SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN	28
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	31
6.1 Validando a Solução do Problema com Condição de Contorno de Neumann	31
6.2 Comparação entre os Métodos para Análise no Tempo	32

6.3	Comparação entre os Conjuntos de Funções para o Método de Galerkin	34
7	CONCLUSÕES	40
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42
8	APÊNDICE	45
8.1	Implementação das Soluções Analíticas	45
8.1.1	Solução Analítica Neumann	45
8.1.2	Solução Analítica Dirichlet	46

Lista de Figuras

Figura 2.1	Solução Analítica da Equação com Condição de Contorno de Dirichlet	5
Figura 3.1	Solução Analítica para o problema com condição de contorno de Dirichlet $\omega = 10$	13
Figura 3.2	Solução Analítica para o problema com condição de contorno de Dirichlet $\omega = 40$	14
Figura 4.1	Solução Analítica do Problema com condição de contorno de Neumann	17
Figura 6.1	Validação da Solução Analítica do Problema com Condição de Contorno de Neumann	32
Figura 6.2	Comparação no tempo para $w = 15$	33
Figura 6.3	Comparação no tempo para $w = 20$	37
Figura 6.4	Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 5, p = 3$	37
Figura 6.5	Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 5, p = 10$	38
Figura 6.6	Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 20, p = 10$	38
Figura 6.7	Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 20, p = 10, t = 2s$. . .	39
Figura 6.8	Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 30, p = 10$	39

RESUMO

O desenvolvimento de métodos numéricos para Equações Diferenciais é de grande importância para a compreensão de diversos fenômenos, visto que, em geral, a solução exata para essas equações nem sempre é conhecida. Por outro lado, os métodos numéricos tem se tornado bastante eficazes ao longo dos anos, dificultando a comparação entre eles no que diz respeito à precisão. Neste trabalho, é apresentado, como um suporte para a comparação de métodos numéricos baseados em ajuste de parâmetro, a solução exata da Equação da Onda unidimensional aplicada a vibração de uma corda submetida a determinadas condições iniciais e de contorno. Para a verificação da utilidade da solução obtida, este trabalho também aproxima a solução analítica utilizando o Método de Galerkin, levando em consideração outros métodos numéricos que fazem uma comparação com relação ao tempo, também apresentando um estudo sobre os conjuntos de funções usados no método de Galerkin.

Palavras-chave: Equação da Onda, Vibrações, Solução Analítica, Diferenças Finitas, Galerkin, Diferença Central, Houbolt, Newmark.

ABSTRACT

The development of numerical methods for Differential Equations is of great importance for the comprehension of several phenomenons, since, in general, the exact solution of these equations is not known. On the other hand, these methods turned to be pretty effective along the years, difficulting the comparison between them in terms of precision. In this work, it is presented, as a support to comparison of parameter adjustment based numerical methods, the exact solution of the unidimensional Wave Equation applied to vibration of a string submitted to determined initial and boundary conditions. For the utility verification of the obtained solution, this work also approximates the analytical solution using the Galerkin Method, considering other numerical methods that makes time related comparisons, also presenting a study about the function sets used in the Galerkin Method.

keywords: Wave Equation, Vibration, Analytical Solution, Finite Differences, Galerkin, Central Difference, Houbolt, Newmark.

1 INTRODUÇÃO

Dentro da Matemática Aplicada, as Equações Diferenciais têm um papel relevante na ligação e interação com outras ciências, desde sua origem em problemas ligados à Física e recentemente como ferramenta indispensável à biologia com todas suas ramificações. As Equações Diferenciais constituem uma importante ferramenta para a resolução de uma série de problemas nos mais amplos ramos, sendo comumente utilizadas para descrever fenômenos tais como a propagação das ondas e a distribuição de calor, que são modelados por Equações Diferenciais Parciais, restritas a certas condições iniciais e de contorno relativas a cada um dos casos em particular. Neste trabalho é apresentado uma solução de referência para um problema regido pela equação da onda unidimensional.

A equação da onda e suas variações encontram diversas aplicações práticas, como por exemplo a vibração de sólidos elásticos [6, 15], elastografia hepática que utiliza ondas elásticas [8], detecção de vazamento em tubulações de gás e em dutos de petróleo [3, 7]. Porém, problemas que envolvem geometrias complexas geralmente requerem a aplicação de métodos aproximados de solução, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) [21, 10, 2] e o Método das Diferenças Finitas (MDF) [1, 12, 4].

Deve-se salientar que o desenvolvimento de métodos numéricos para problemas regidos por equações diferenciais ainda é tema de intensa pesquisa científica. Neste contexto, a comparação entre a precisão de diferentes métodos requer, de forma geral, uma solução de referência precisa e confiável. Algumas soluções analíticas para o problema da equação da onda podem ser encontradas na literatura [16, 11, 9]. Porém, uma vez que os métodos numéricos tem tornado-se cada vez mais precisos, torna-se necessária a utilização de soluções de referência que possam ser ajustadas de maneira a permitir uma comparação mais apurada entre esses métodos.

Em outras palavras, é desejável ter soluções de referência que possam ser ajustadas para tornar o problema cada vez mais difícil de ser resolvido numericamente.

De fato, a maioria das soluções analíticas encontradas na literatura envolvem condições de contorno homogêneas e deslocamentos iniciais prescritos. Porém, de forma geral, estes problemas não demandam grande esforço por parte dos métodos numéricos para que soluções precisas sejam obtidas. Isso prejudica a comparação entre diferentes métodos quando os mesmos possuem elevado grau de precisão, uma vez que as soluções obtidas tornam-se muito semelhantes, dificultando a comparação.

O objetivo deste trabalho é apresentar a solução analítica de dois problemas que possam ser utilizadas como referência para o teste de métodos numéricos de solução. Em particular, os problemas apresentados possuem um parâmetro que pode ser ajustado para tornar a solução numérica cada vez mais difícil, no que diz respeito à precisão. Isso permite comparar métodos de precisão bastante elevada.

Os problemas, (4.1) e (2.1), apresentados nas próximas seções tem condições de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente. O principal enfoque deste trabalho é apresentar ambas as soluções analíticas, onde a solução do problema (4.1) é apresentada em [18]. Aqui apresentamos esta solução detalhada, tendo em vista que em [18] não foi apresentado o processo de obtenção da solução. Além dessa solução analítica, é feita a comparação numérica usando o Método de Galerkin e três métodos numéricos de integração no tempo, sendo estes: o método da Diferença Central, o método de Houbolt e o Método de Newmark; a fim de saber qual deles apresenta melhor solução comparada ao problema proposto. Também é feito um estudo com relação ao conjunto de funções usadas para o método de Galerkin, sendo estes conjuntos de funções formados por funções polinomiais ou trigonométricas que satisfaçam as condições de contorno do problema.

2 PROBLEMA DE REFERENCIA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DIRICHLET

Neste capítulo é apresentado a solução analítica do problema regido pela equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (2.1)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

e condições de contorno

$$u(x = 0, t) = 0, \quad (2.4)$$

$$u(x = L, t) = \text{sen}(\omega t), \quad (2.5)$$

onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda, L é comprimento do domínio e ω é a frequência de vibração aplicada em $x = L$. A solução deste problema foi apresentada em [13].

Uma solução fraca para este problema é dada por

$$u(x, t) = \frac{x \operatorname{sen}(\omega t)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[C_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + B_n(t) \right], \quad (2.6)$$

com

$$C_n = -\frac{\omega b_n}{cn\pi}, \quad (2.7)$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi}, \quad (2.8)$$

$$B_n(t) = K_2 \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) b_n}{(cn\pi)^2 - L^2\omega^2}, \quad (2.9)$$

$$K_2 = -\frac{L^2\omega^3 b_n}{(cn\pi)^3 - cn\pi L^2\omega^2}, \quad (2.10)$$

como demonstrado adiante.

Esta solução é mostrada Figura 2.1, para $c = 3$, $w = 5$, em dois segundos, no domínio $[0, 2]$.

De forma geral, a precisão dos métodos numéricos de solução está relacionada com o valor das derivadas espaciais e temporais da solução. Neste caso, verifica-se que quanto maiores forem os valores de ω , maiores serão os valores das derivadas. Assim, é possível tornar o problema tão difícil para ser resolvido computacionalmente quanto se queira, no que diz respeito à precisão da solução obtida, aumentando-se o parâmetro ω . Isto permite que esta solução de referência possa ser utilizada para comparação de métodos numéricos extremamente precisos, que em certos casos talvez obtivessem soluções tão precisas que não pudessem ser comparadas adequadamente.

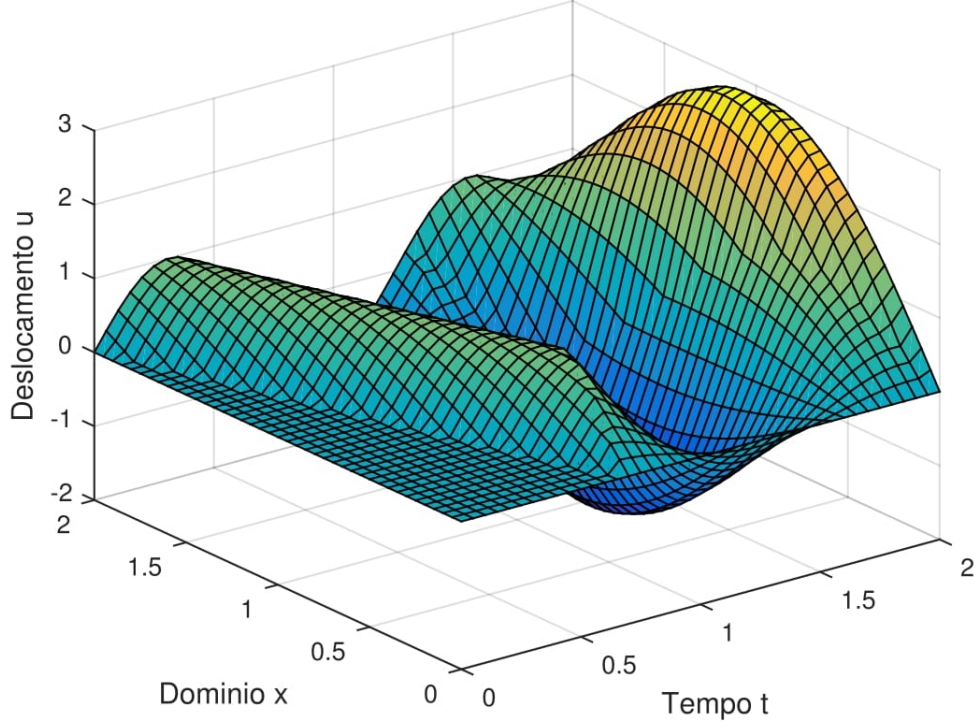


Figura 2.1: Solução Analítica da Equação com Condição de Contorno de Dirichlet

2.1 Solução Analítica

A técnica de separação de variáveis não pode ser aplicada diretamente ao problema dado pelas Eq. (2.1)-(2.5), por causa da condição de contorno dependente do tempo da Eq. (2.5). Assim, é necessário antes transformar o problema acima em um problema equivalente com condições de contorno independentes do tempo. Isto pode ser feito escrevendo-se a solução do problema na forma [16]

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{\sin(\omega t)}{L}, \quad (2.11)$$

onde $v(x, t)$ é uma função que iremos determinar. Ao substituir $u(x, t)$ como definido na Eq. (2.11) no problema original obtemos então a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 \sin(\omega t)x}{L}, \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (2.12)$$

com condições iniciais

$$v(x, 0) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{x\omega}{L}, \quad (2.14)$$

e condições de contorno

$$v(x = 0, t) = 0, \quad (2.15)$$

$$v(x = L, t) = 0. \quad (2.16)$$

Note que as condições de contorno não dependem mais do tempo e, portanto, podem ser aplicadas normalmente. Porém, a Eq. (2.12) apresenta um termo a mais do que a Eq. (2.1). Como o novo problema gerado a partir da hipótese da Eq. (2.11) é linear, podemos dividi-lo em dois problemas distintos, obter as soluções para cada um deles e depois obter a solução final somando as soluções de cada problema. Desta forma, a solução do problema definido pelas Eq. (2.1)-(2.12) pode ser obtida somando-se as soluções dos seguintes problemas:

Problema A

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (2.17)$$

com condições iniciais e de contorno dadas pelas Eq. (2.13)-(2.16).

Problema B

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 \text{sen}(\omega t)x}{L}, \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (2.18)$$

com condições iniciais dadas pela Eq. (2.13) e

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (2.19)$$

e condições de contorno dadas pelas Eq. (2.15)-(2.16).

O Problema A considera a condição de contorno não homogênea da Eq. (2.17), porém não considera o termo adicional na equação diferencial. Já o Problema B considera o termo adicional na equação diferencial, mas não considera a condição de contorno homogênea no lugar daquela da Eq. (2.17). A solução apresentada na Eq. (2.6) pode ser então obtida somando-se $\frac{\text{sen}(\omega t)}{L}$, a solução do problema A e a solução do problema B, que serão resolvidos adiante.

2.2 Solução do Problema A

A solução geral do problema A pode ser obtida por separação de variáveis [16, 11, 9] escrevendo-se

$$v(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.20)$$

temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \quad (2.22)$$

Deste modo, a Eq. (2.17) pode ser reescrita como

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.23)$$

A única hipótese para que duas funções de variáveis distintas sejam sempre iguais é que ambas sejam iguais a uma constante [16, 11, 9], isto é

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k. \quad (2.24)$$

Da técnica de separação de variáveis também notamos que $k \geq 0$ implicaria em uma solução nula [16, 11, 9]. Assim, consideramos apenas k negativo, assumindo que $k = -p^2$. Com isso, teremos duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) nas variáveis x e t

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad (2.25)$$

$$T''(t) + c^2 p^2 T(t) = 0, \quad (2.26)$$

cujas soluções são dadas, após aplicação das condições das Eq. (2.13), (2.15) e (2.16), por [11]

$$X_n(x) = C_2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad (2.27)$$

$$T_n(t) = C_4 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} ct \right), \quad (2.28)$$

A última condição a ser aplicada é aquela da Eq. (2.17). Como a função x é ímpar no intervalo $[-L, L]$, podemos escrevê-la como uma série de Fourier de senos $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$. Assim, a condição da Eq. (2.17) pode ser escrito como

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\omega}{L}x = -\frac{\omega}{L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.29)$$

onde o coeficiente b_n é simplesmente o coeficiente da série de Fourier da função x no intervalo $[-L, L]$ [16, 9, 11, 5], que resulta

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi}. \quad (2.30)$$

Como a Eq. (2.17) é satisfeita por $v(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ para n inteiro qualquer, então a solução é na verdade a soma de todas as soluções possíveis. Portanto, a solução do problema A é

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{cn\pi t}{L} \right). \quad (2.31)$$

Para determinar o coeficiente C_n , usaremos a condição da Eq. (2.17) reescrita pela Eq. (2.29). Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos(0) \frac{cn\pi}{L} = -\frac{\omega}{L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[C_n \frac{cn\pi}{L} + \frac{\omega}{L} b_n \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como a equação tem que ser satisfeita para todo n inteiro, devemos ter

$$C_n = -\frac{\omega}{cn\pi}b_n. \quad (2.33)$$

Portanto, a solução do Problema A é dada pela Eq. (2.31), onde as constantes C_n e b_n são definidas nas Eq. (2.33) e (2.30), respectivamente.

2.3 Solução do Problema B

Das condições de contorno das Eq. (2.15)-(2.16) sabemos que v deve se anular em $x = 0$ e $x = L$. Assim, o problema B pode ser resolvido escrevendo $v(x, t)$ como uma série de Fourier de senos $\sin(n\pi x/L)$ no intervalo $[-L, L]$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.34)$$

onde os coeficientes $B_n(t)$ serão determinados.

O termo adicional da equação da Eq. (2.19) envolve a função x , que também pode ser escrita como uma série de senos $\sin(n\pi x/L)$ no intervalo $[-L, L]$. Assim, reescrevemos o termo adicional da Eq. (2.19) como

$$\frac{\omega^2 \sin(\omega t)x}{L} = \frac{\omega^2 \sin(\omega t)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.35)$$

onde b_n é novamente dado pela Eq. (2.30), referente a expansão da função x no intervalo $[-L, L]$.

Substituindo as Eq. (4.50) e (2.35) na Eq. (2.19) obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[B_n''(t) + B_n(t) \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2 \sin(\omega t)b_n}{L} \right] = 0 \quad (2.36)$$

que será satisfeita quando

$$B_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2 \sin(\omega t) b_n}{L} = 0. \quad (2.37)$$

A solução da EDO acima é dada por [11]

$$B_n(t) = K_1 \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + K_2 \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L\omega^2 \sin(\omega t) b_n}{(cn\pi)^2 - L^2\omega^2}. \quad (2.38)$$

Aplicando as condições de contorno da Eq. (2.13), temos

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [B_n(0)] = 0, \quad (2.39)$$

o que resulta

$$B_n(0) = K_1 = 0, \quad (2.40)$$

e, portanto,

$$B_n(t) = K_2 \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L\omega^2 \sin(\omega t) b_n}{(cn\pi)^2 - L^2\omega^2}. \quad (2.41)$$

Analogamente, para a condição de contorno da Eq. (2.19) temos

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n'(0)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0, \quad (2.42)$$

que requer

$$B_n'(0) = K_2 \left(\frac{cn\pi}{L}\right) + \frac{L\omega^3 b_n}{(cn\pi)^2 - L^2\omega^2} = 0, \quad (2.43)$$

e, portanto,

$$K_2 = -\frac{L^2\omega^3 b_n}{(cn\pi)^3 - cn\pi L^2\omega^2}. \quad (2.44)$$

Portando, a solução do Problema B é dada pela Eq. (4.50) onde o coeficiente $B_n(t)$ é dado pela Eq. (2.41).

3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET

Como mencionado esta solução é dada em [13]. A comparação da solução analítica é feita através do Método das Diferenças Finitas onde a regra de atualização explícita é dada por [4].

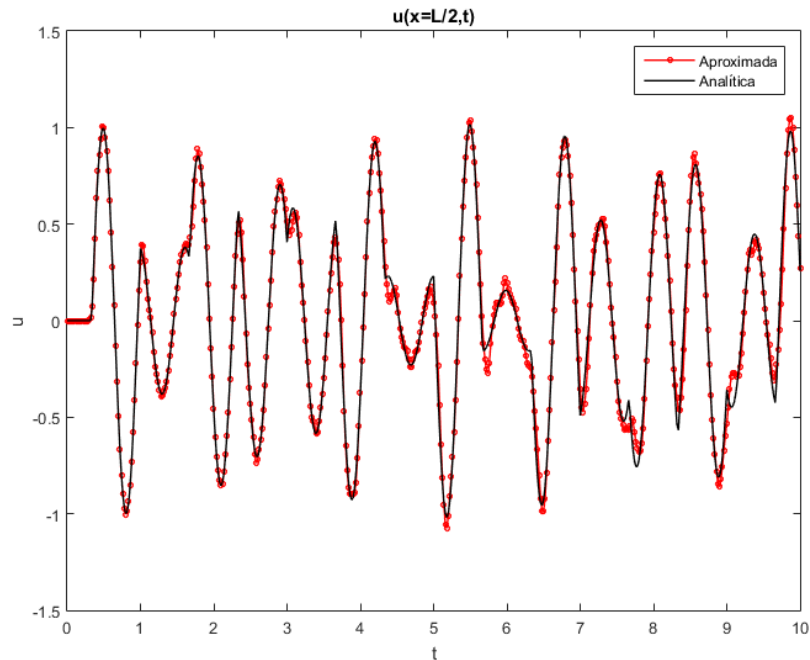


Figura 3.1: Solução Analítica para o problema com condição de contorno de Dirichlet $\omega = 10$

Fonte: Lima et al. [13]

Com velocidade $c = 3$, frequência de excitação $\omega = 10$, domínio $[0, 2]$ e em 10 segundos, temos na figura 3.1 que a solução analítica se aproxima da solução aproximada. Aumentando o valor de $\omega = 40$, temos pela figura 3.2 que as soluções se distanciam devido o aumento da frequência de excitação.

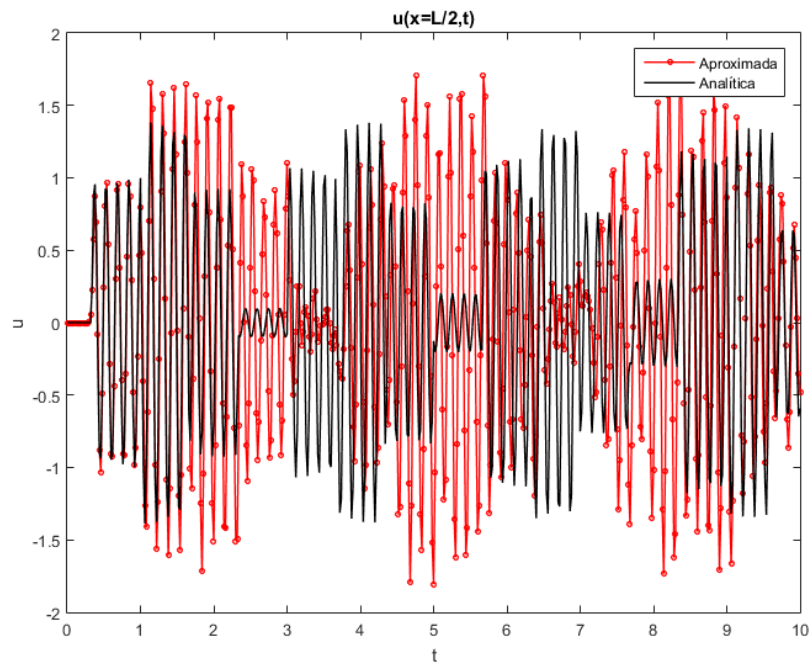


Figura 3.2: Solução Analítica para o problema com condição de contorno de Dirichlet $\omega = 40$

Fonte: Lima et al. [13]

O código no MATLAB para solução analítica está no apêndice 8.1.2. Disponível em [13].

4 PROBLEMA DE REFERÊNCIA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN DEPENDENTE DO TEMPO

Neste capítulo é apresentada a solução analítica do problema regido pela equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (4.1)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4.3)$$

e condições de contorno

$$u(x = 0, t) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u(x = L, t)}{\partial t} = \text{sen}(\omega t), \quad (4.5)$$

onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda, L é comprimento do domínio e ω é a frequência de vibração aplicada em $x = L$. A solução de um problema semelhante foi apresentado em [17].

Uma solução fraca para este problema é dada por

$$u(x, t) = x \operatorname{sen}(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(K_n x) (C_n \operatorname{sen}(K_n c t) + B_n(t)), \quad (4.6)$$

com

$$K_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L}, \quad (4.7)$$

$$C_n = -2 \frac{\omega}{K_n^3 c L} (-1)^{n-1}, \quad (4.8)$$

$$B_n(t) = -2 \frac{\omega^3 (-1)^{n-1}}{K_n^3 (c^3 K_n^2 - c \omega^2)} \cos(K_n c t), \quad (4.9)$$

como será demonstrado adiante.

Esta solução é mostrada na Figura 4.1, considerando-se $c = 3$, $w = 5$, $t = 2$ e $L = 2$.

De forma geral, a precisão dos métodos numéricos de solução está relacionada com o valor das derivadas espaciais e temporais da solução. Neste caso, verifica-se que quanto maiores forem os valores de ω , maiores serão os valores das derivadas. Assim, é possível tornar o problema tão difícil para ser resolvido computacionalmente quanto se queira, no que diz respeito à precisão da solução obtida, aumentando-se o parâmetro ω . Isto permite que esta solução de referência possa ser utilizada para comparação de métodos numéricos extremamente precisos, que em certos casos talvez obtivessem soluções tão precisas que não pudessem ser comparadas adequadamente.

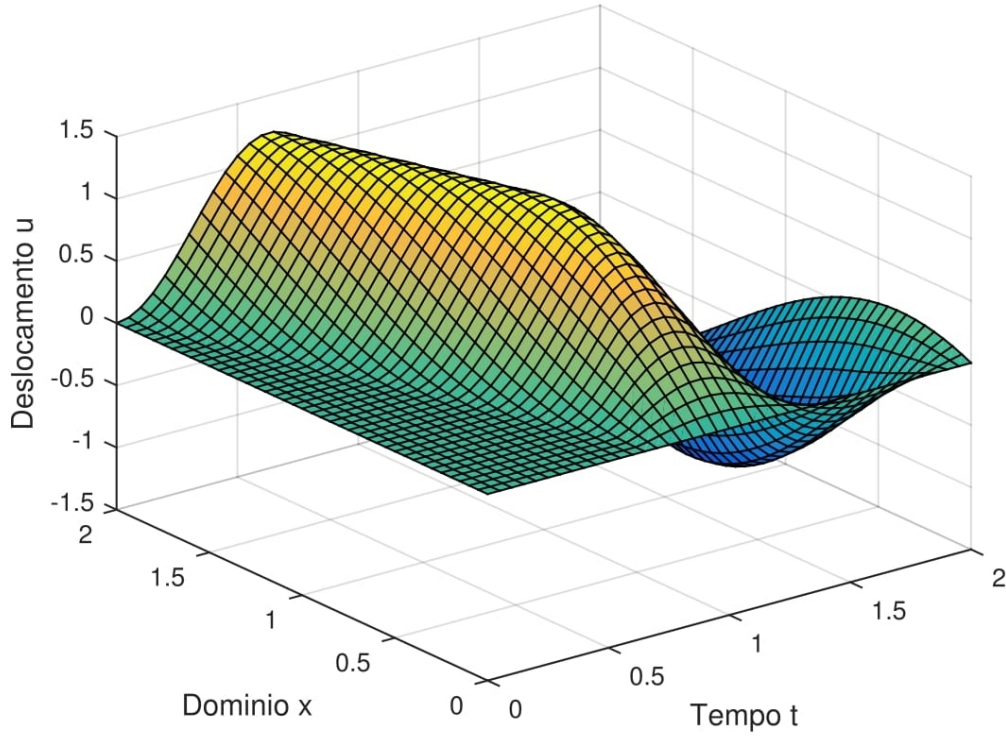


Figura 4.1: Solução Analítica do Problema com condição de contorno de Neumann

4.1 Solução Analítica

A técnica de separação de variáveis não pode ser aplicada diretamente ao problema dado pelas Eq. (4.1)-(4.5), por causa da condição de contorno dependente do tempo da Eq. (4.5). Assim, é necessário antes transformar o problema acima em um problema equivalente com condições de contorno independentes do tempo. Isto pode ser feito escrevendo-se a solução do problema na forma [16]

$$u(x, t) = v(x, t) + x \sin(\omega t), \quad (4.10)$$

onde $v(x, t)$ é uma função que iremos determinar. Ao substituir $u(x, t)$ como definido na Eq. (4.10) no problema original obtemos então a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \omega^2 x \sin(\omega t), \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (4.11)$$

com condições iniciais

$$v(x, 0) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -x\omega, \quad (4.13)$$

e condições de contorno

$$v(x = 0, t) = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial v(x = L, t)}{\partial x} = 0. \quad (4.15)$$

Note que as condições de contorno não dependem mais do tempo e, portanto, o Método de Separação de Variáveis pode ser aplicado. Porém, a Eq. (4.11) apresenta um termo a mais do que a Eq. (4.1). Como o novo problema gerado a partir da Eq. (4.10) é linear, podemos dividi-lo em dois problemas distintos, obter as soluções para cada um deles e depois obter a solução final somando as soluções de cada problema. Desta forma, a solução do problema definido pelas Eq. (4.1)-(4.11) pode ser obtida somando-se as soluções dos seguintes problemas:

Problema A (Solução Homogênea)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (4.16)$$

com condições iniciais e de contorno dadas pelas Eq. (4.12)-(4.15).

Problema B (Solução Particular)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x\omega^2 \text{sen}(\omega t), \quad t > 0, x \in [0, L], \quad (4.17)$$

com condições iniciais dadas pela Eq. (4.12) e

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4.18)$$

e condições de contorno dadas pelas Eq. (4.14)-(4.15).

O Problema A considera a condição de contorno não homogênea da Eq. (4.13), porém não considera o termo adicional na equação diferencial. Já o Problema B considera o termo adicional na equação diferencial, mas não considera a condição de contorno homogênea no lugar daquela da Eq. (4.13). A solução apresentada na Eq. (4.6) pode ser então obtida somando-se $x\text{sen}(\omega t)$, a solução do problema A e a solução do problema B, que serão resolvidos adiante.

4.2 Solução do Problema A

A solução geral do Problema A pode ser obtida por separação de variáveis [16, 11, 9] escrevendo-se

$$v(x, t) = X(x)T(t), \quad (4.19)$$

temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = X''(x)T(t). \quad (4.21)$$

Deste modo, a Eq. (4.16) pode ser reescrita como

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (4.22)$$

A única hipótese para que duas funções de variáveis distintas sejam sempre iguais é que ambas sejam iguais a uma constante [16, 11, 9], isto é

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k. \quad (4.23)$$

Da técnica de separação de variáveis também notamos que $k \geq 0$ implicaria na solução nula. Assim, consideramos apenas k negativo, assumindo $k = -p^2$. Com isso, teremos duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) nas variáveis x e t

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0, \quad (4.24)$$

$$T''(t) + c^2 p^2 T(t) = 0. \quad (4.25)$$

Da equação (4.24) temos que $\lambda^2 + p^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm pi$, um número complexo, e solução para X é dada por

$$X(x) = A \sin(px) + B \cos(px). \quad (4.26)$$

Da equação (4.25) temos que $\lambda^2 + c^2 p^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm cpi$, um número complexo, e solução para T é dada por

$$T(t) = C \text{sen}(cpt) + D \cos(cpt). \quad (4.27)$$

Das eq. (4.12) e (4.14), temos

$$v(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad (4.28)$$

onde temos

$$X(0) = 0, \quad (4.29)$$

pois, $T(t) \neq 0$ para que seja válida a eq. (4.19).

$$X(0) = B \cos(0) = B = 0, \quad (4.30)$$

$$v(x, 0) = X(x)T(0) = 0 \rightarrow T(0) = 0, \quad (4.31)$$

$$T(0) = D \cos(0) = D = 0. \quad (4.32)$$

Com isso, temos

$$X(x) = A \text{sen}(px), \quad (4.33)$$

$$T(t) = C \text{sen}(cpt). \quad (4.34)$$

Como $\frac{\partial v(L, 0)}{\partial x} = 0$, temos

$$\frac{\partial v(L, 0)}{\partial x} = \frac{\partial X(L)}{\partial x} T(0) = 0 \rightarrow \frac{\partial X(L)}{\partial x} = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial X(L)}{\partial x} = A \cos(pL) = 0 \rightarrow \cos(pL) = 0 \rightarrow p = (2n - 1) \frac{\pi}{2L}, \quad (4.36)$$

$$K_n = \frac{\pi}{L} \left(n - \frac{1}{2} \right). \quad (4.37)$$

Portanto,

$$X(x) = A \text{sen}(K_n x) \quad (4.38)$$

e

$$T(t) = C \text{sen}(K_n c t), \quad (4.39)$$

com $n \in \mathbb{Z}$.

Como, o Problema A é satisfeito para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, a solução pode ser escrita como a soma de todas as soluções possíveis, isto é:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A \text{sen}(K_n x) C \text{sen}(K_n c t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}(K_n x) \text{sen}(K_n c t), \quad (4.40)$$

onde C_n será uma constante a ser determinada.

A última condição a ser aplicada é aquela da Eq. (4.13). Como a função x é ímpar no intervalo $[-L, L]$, podemos escrevê-la como uma série de Fourier de

senos em particular de $\sin(K_n x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Assim, a condição da Eq. (4.13) pode ser escrita como

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\omega x = -\omega \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(K_n x), \quad (4.41)$$

onde o coeficiente A_n é simplesmente o coeficiente da série de Fourier da função x no intervalo $[-L, L]$ [16, 9, 11, 5], o que resulta

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin(K_n x) dx = 2(-1)^{n+1} \frac{1}{K_n^2 L}. \quad (4.42)$$

Na equação (4.40), com $t = 0$, temos

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(K_n x) \sin(K_n c(0)) = 0, \quad (4.43)$$

Com A_n calculado usamos a condição de Neumann (4.13) em (4.41)

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(K_n x) K_n c = -\omega \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(K_n x). \quad (4.44)$$

Por critérios de ortogonalidade, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n c = -\omega \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (4.45)$$

$$C_n = -\frac{\omega A_n}{K_n c} = -\frac{\omega}{K_n^3} (2(-1)^{n-1}), \quad (4.46)$$

Como a Eq. (4.16) é satisfeita por $v(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ para n inteiro qualquer, então a solução é na verdade a soma de todas as soluções possíveis. Portanto, a solução do problema A é

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}(K_n x) \text{sen}(K_n c t), \quad (4.47)$$

onde

$$C_n = -\frac{\omega}{K_n^3} (2(-1)^{n-1}). \quad (4.48)$$

4.3 Solução do Problema B

Das condições de contorno das Eq. (4.14)-(4.15) sabemos que v deve se anular em $x = 0$ e $x = L$. Assim, o problema B pode ser resolvido escrevendo $v(x, t)$ como uma série de Fourier da seguinte forma no intervalo $[-L, L]$

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) X_n(x), \quad (4.49)$$

onde X_n são as autofunções que encontramos quando resolvemos o problema homogêneo associado ao Problema B.

A equação (4.41), foi escrita como uma série de Fourier de senos a partir da condição inicial (4.13). Deste modo temos que $X_n(x) = \text{sen}(K_n x)$, assim

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{sen}(K_n x). \quad (4.50)$$

O termo adicional $\omega^2 x \text{sen}(\omega t)$ da Eq. (4.17) envolve a função x , que como mostrado anteriormente pode ser escrita como uma série de Fourier de senos $\text{sen}(K_n x)$, no intervalo $[-L, L]$. Assim, reescrevemos o termo adicional da Eq. (4.17) como

$$\omega^2 \text{sen}(\omega t)x = \omega^2 \text{sen}(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(K_n x), \quad (4.51)$$

onde A_n é novamente dado pela Eq. (4.42), referente a expansão da função x no intervalo $[-L, L]$ para o problema A.

Substituindo as Eq. (4.49) e (4.51) na Eq. (4.17) obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n''(t) \text{sen}(K_n x) = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{sen}(K_n x) K_n^2 + \omega^2 \text{sen}(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(K_n x), \quad (4.52)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [B_n''(t) + c^2 K_n^2 B_n(t) - \omega^2 A_n \text{sen}(\omega t)] \text{sen}(K_n x) = 0. \quad (4.53)$$

A equação (4.53) deve ser satisfeita para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$, então

$$B_n''(t) + c^2 K_n^2 B_n(t) - \omega^2 A_n \text{sen}(\omega t) = 0, \quad (4.54)$$

que é uma EDO de segunda ordem.

Encontramos primeiro a solução da EDO homogênea através da sua equação característica, a fim de determinarmos um λ

$$\lambda^2 + c^2 K_n^2 \lambda = 0, \quad (4.55)$$

$$\lambda = \pm c K_n i. \quad (4.56)$$

Deste modo, temos que a solução de (4.55) é dada por

$$B_n(t) = D_1 \cos(K_n ct) + D_2 \text{sen}(K_n ct). \quad (4.57)$$

Agora encontramos a solução da EDO não homogênea pelo método da variação de parâmetros [11]

$$B_n''(t) + c^2 K_n^2 B_n(t) = \omega^2 A_n \text{sen}(\omega t), \quad (4.58)$$

$$B_n(t) = u(t) \cos(K_n ct) + v(t) \text{sen}(K_n ct). \quad (4.59)$$

Encontramos as soluções de $u(t)$ e $v(t)$ resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} u'(t) \cos(K_n ct) + v'(t) \text{sen}(K_n ct) = 0 \\ -u'(t) \text{sen}(K_n ct) K_n c + v'(t) \cos(K_n ct) = \omega^2 A_n \text{sen}(\omega t) \end{cases}. \quad (4.60)$$

Somamos os valores das EDO's homogêneas (4.55) e não homogêneas (4.58), com isso encontramos a solução da EDO de segunda ordem (4.54) é dada por

$$B_n(t) = D_1 \cos(K_n ct) + D_2 \text{sen}(K_n ct) + \frac{A_n \omega^2 \text{sen}(\omega t)}{K_n c^2 - \omega^2}. \quad (4.61)$$

Por fim precisamos determinar os valores das constantes D_1 e D_2 pelas condições iniciais (4.12) e (4.18)

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) \text{sen}(K_n x) = 0 \rightarrow B_n(0) = 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(0) \text{sen}(K_n x) = 0 \rightarrow B_n'(0) = 0. \quad (4.63)$$

De (4.62) e (4.63) temos que

$$D_1 = -\frac{\omega^3 A_n}{c^3 K_n^3 - K_n c \omega^2}, \quad (4.64)$$

$$D_2 = 0. \quad (4.65)$$

Portanto, a solução do Problema inicial (4.1) é dada pela soma das soluções dos problemas A (4.47) e B (4.61), que é equivalente a fórmula (4.6), onde os K_n , C_n , $B_n(t)$, D_1 e D_2 são dados pelas fórmulas (4.7), (4.8), (4.9), (4.64) e (4.65), respectivamente.

5 SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN

Foi realizada uma implementação das soluções analíticas em MATLAB [14] e para comparação numérica foi realizada uma implementação do problema utilizando o Método de Galerkin que resolve o problema espacial. Para integração numérica no tempo foram usados três métodos: Método da Diferença Central, Método de Houbolt e Método de Newmark.

Para que possa ser usado o Método de Galerkin para o problema (4.1), é necessário encontrar uma forma fraca [20]. Multiplicando-se em ambos os membros por uma função teste arbitrária $V(x) \in X$ e integrando. Com isso temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} V(x) dx = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial t^2} V(x) dx. \quad (5.1)$$

Integrando o primeiro termo por partes e rearranjando a equação temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial t^2} V(x) dx = \left[\frac{\partial U(x)}{\partial x} V(x) \right]_{\Gamma}, \quad (5.2)$$

onde $\Gamma = 2\Omega$.

Aproximações de U e $V \in X$ podem ser feitas escrevendo U_h e $V_h \in X_h$, onde X_h é um espaço finito formado por funções $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é

$$U_h(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \text{ para todo } U_h(x) \in X_h, \quad (5.3)$$

$$V_h(x) = \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(x), \text{ para todo } V_h(x) \in X_h. \quad (5.4)$$

Substituindo as aproximações (5.3) e (5.4) na formulação fraca (5.2)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} b_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} b_j \varphi_j d\Omega = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial U}{\partial x} b_j \varphi_j \right]_{\Gamma}. \quad (5.5)$$

Derivando-se a aproximação dada pela eq. (5.3) com relação ao tempo obtém-se a seguinte relação

$$\frac{\partial^2 U_h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 a_i}{\partial t^2} \varphi_i = \sum_{i=1}^N \ddot{a}_i \varphi_i, \quad (5.6)$$

onde \ddot{a}_i representa a derivada segunda de a em relação ao tempo.

Deste modo, substitui-se a equação (5.6) em (5.5), resultando

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} b_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \ddot{a}_i \varphi_i b_j \varphi_j d\Omega = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial U}{\partial x} b_j \varphi_j \right]_{\Gamma}. \quad (5.7)$$

Que pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i b_j \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ddot{a}_i b_j \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega = \sum_{j=1}^N b_j \left[\frac{\partial U}{\partial x} \varphi_j \right]_{\Gamma}. \quad (5.8)$$

Como a função teste V_h é arbitrária, o valor dos coeficientes b_j na equação (5.9) são quaisquer. Assim, a equação (5.9) será sempre satisfeita apenas quando

$$\sum_{i=1}^N a_i \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^N \ddot{a}_i \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega = \left[\frac{\partial U}{\partial x} \varphi_j \right]_{\Gamma}, \quad (5.9)$$

válido para $j = 1, 2, \dots, N$

A expressão anterior resulta no sistema de equações

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{F}, \quad (5.10)$$

onde

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega, \quad (5.11)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega, \quad (5.12)$$

$$F_j = \left[\frac{\partial U(x)}{\partial x} \varphi_j \right]_{\Gamma}, \quad (5.13)$$

temos $\frac{\partial U(x)}{\partial x}$ da Condição de Contorno de Neumann (4.5). As funções $\varphi(x)$ são conjuntos de funções que satisfazem as condições de contorno.

O sistema da equação (5.10) foi resolvido usando os métodos de integração no tempo: da Diferença Central, Houbolt e Newmark; cuja descrição está em [2]. Foram utilizadas rotinas computacionais já disponíveis na comunidade científica. No método da diferença central e o de Houbolt para iteração no tempo é necessário duas iterações interiores. Por isso as duas primeiras iterações são feitas utilizando o Método de Newmark.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como resultados, foram apresentadas as soluções analíticas dos problemas (2.1) e (4.1). A solução do problema (2.1) foi apresentada em um trabalho [13] apresentado no ENMC 2016.

Além disso, foram realizados dois tipos de comparações para o problema (4.1), o primeiro com relação aos métodos de análise no tempo, em seguida, uma comparação com relação a escolha do conjunto de funções usadas no Método de Galerkin, sendo estes conjuntos de funções trigonométricos ou polinomiais.

6.1 Validando a Solução do Problema com Condição de Contorno de Neumann

Nesta seção mostra-se que a solução da equação (4.1), converge com as soluções aproximadas impostas pelos métodos numéricos: da Diferença Central, de Houbolt e de Newmark.

A análise é feita em $t = 10$, usando a solução analítica e os três métodos numéricos. A comparação foi realizada em $x = \frac{L}{2}$. Podemos observar na Figura 6.1 que neste intervalo de tempo as quatro soluções ficam bastante próximas, com isso concluímos que a solução analítica está correta. Mudando a frequência de excitação, é obtido um resultado diferente ao longo do tempo. Na comparação dos métodos de integração no tempo é mostrado essa mudança a fim de impor qual se aproxima mais da solução analítica. O código no MATLAB para solução analítica está no Apêndice 8.1.1.

É importante salientar que a plotagem das funções no gráfico é feita da seguinte ordem: Diferença Central, Houbolt, Newmark e Exata. Isso implica que

a solução exata fica acima da solução de Newmark, Houbolt, Diferença Central; a de Newmark fica em cima da outras duas, assim sucessivamente. Isso é importante pois caso não seja perceptível alguma solução em alguma das imagens, isso não quer dizer que a solução não aparece e sim que naquele determinado momento ela é igual a solução que está por cima dela.

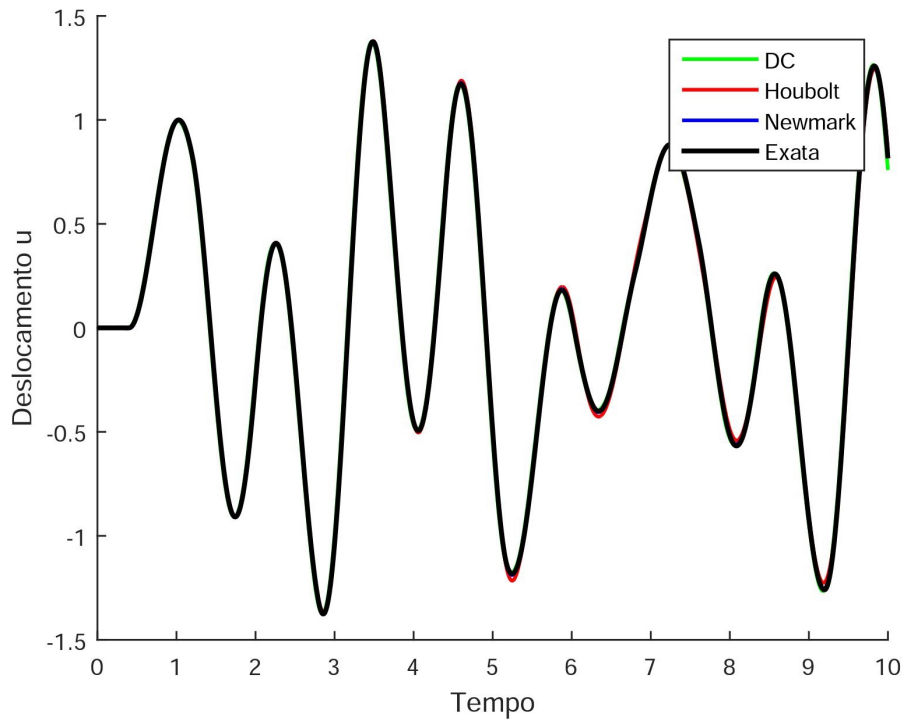


Figura 6.1: Validação da Solução Analítica do Problema com Condição de Contorno de Neumann

6.2 Comparação entre os Métodos para Análise no Tempo

Para comparação no tempo a análise é feita usando os métodos da Diferença Central, de Houbolt e de Newmark. Além disso, é usado um conjunto de funções polinomiais (6.1) que satisfazem as condições de contorno

$$\varphi(x) = x^n, n = 1, \dots, 10. \quad (6.1)$$

O domínio é definido por $L = 2$, tempo $t = 10$, velocidade de propagação da onda $c = 2.5$ e frequência de excitação $w = 5$. Para integração de Gauss, são usados vinte pontos de integração. Depois de encontrada a solução escolhe-se um ponto do domínio $x = \frac{L}{2}$ e é plotado o gráfico desse ponto durante o tempo $t = 10$, para os três métodos acima e para a solução analítica dada por (8.1.1).

É possível observar na Figura 6.1 que os métodos aproximados convergem com a solução analítica, não conseguimos perceber diferença entre os métodos para este caso neste intervalo de tempo. Vale também salientar que a diferença nos métodos fica maior com o passar do tempo.

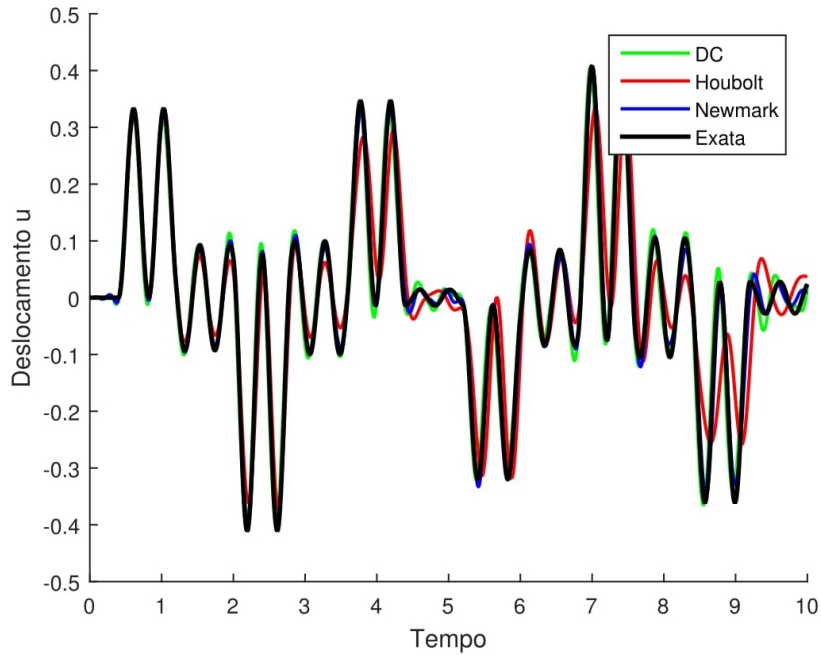


Figura 6.2: Comparação no tempo para $w = 15$

Aumentando o valor da frequência de excitação é possível perceber de modo mais evidente uma distorção nos métodos tendo como referência a solução

analítica, como é mostrado nas figuras 6.2 e 6.3 onde temos $w = 15$ e $w = 20$. Note que temos uma diferença maior na 6.3, onde temos o maior valor de frequência de excitação.

Com isso podemos concluir que o método de Houbolt é menos preciso comparado aos métodos da Diferença Central e o de Newmark. Entre o Método da Diferença Central e Método de Newmark não conseguimos perceber claramente qual obteve o melhor resultado.

6.3 Comparação entre os Conjuntos de Funções para o Método de Galerkin

Agora é feito a comparação com relação aos conjuntos de funções φ . Neste caso para integração numérica no tempo é usado o método de Newmark.

Usa-se um conjunto de funções polinomiais que satisfazem as condições de contorno

$$\varphi(x) = x^n, n = 1, \dots \quad (6.2)$$

e usa-se um conjunto de funções trigonométricas que satisfazem as condições de contorno

$$\varphi(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{2L} \right), n = 1, \dots \quad (6.3)$$

É usado o mesmo domínio $L = 2$, tempo $t = 10$, velocidade de propagação da onda $c = 2.5$ e frequência de excitação $w = 5$. Depois de encontrada a solução é escolhido um ponto do domínio $x = \frac{L}{2}$ e plotado o gráfico desse ponto durante o tempo $t = 10$, para os dois conjuntos de funções e para a solução analítica.

Aqui é importante salientar que a quantidade de funções de aproximação é chamada de p a variável que define a ordem da aproximação. A quantidade de funções pode inferir em qual dos conjuntos de funções converge primeiro para a solução analítica. Por exemplo, na comparação anterior, com relação aos métodos de integração no tempo, foi usado $p = 10$, um conjunto com dez funções polinomiais, para garantir uma melhor precisão e assim uma boa comparação entre os métodos. Neste caso, usando dez funções tanto para o conjunto de funções polinomiais quanto para o conjunto de funções trigonométricas, teremos o método convergindo para a solução em ambos os casos. Então por isso usamos um valor menor $p = 3$. Com $p \leq 3$ nenhum dos casos converge para a solução analítica, mas como podemos ver na Figura 6.4, com $p = 3$, a solução para o conjunto de funções trigonométricas fica muito próxima da solução analítica, enquanto que a solução para o conjunto de funções polinomiais fica mais distante.

Usando $p = 10$ como no caso da comparação anterior, temos que a solução para ambos os conjuntos ficam semelhantes a solução analítica como mostra na Figura 6.5, com $p = 5$ já temos soluções bem próximas, para ambos os conjuntos de funções.

Aumentando o valor da frequência de excitação com uma quantidade alta de funções são obtidas soluções aproximadas um pouco diferentes da analítica como podemos ver na Figura 6.6, principalmente a partir de $t = 7s$, onde não podemos ter uma boa aproximação. Diminuindo o tempo $t = 2s$, podemos fazer uma análise no início do tempo e perceber pela Figura 6.7 que o conjunto de funções trigonométricas fica mais próximo da solução exata, mesmo com um alto valor de frequência de excitação.

Aumentando ainda mais a frequência de excitação $\omega = 30$ podemos perceber pela Figura 6.8 uma perda para ambos os conjuntos de funções, o que nos faz concluir que não temos boa solução para altos valores de ω . Neste caso ambos os

conjuntos de funções se distanciam da solução exata devido a dificuldade numérica em se resolver o problema.

De modo geral temos que, como esperado, o problema de referência (4.1) se torna mais difícil de ser resolvido numericamente quando a frequência de excitação é aumentada. Por este motivo, a solução de referência apresentada é importante para a comparação de métodos numéricos que possuam alto grau de precisão. Essa conclusão é análoga ao problema de referência (2.1).

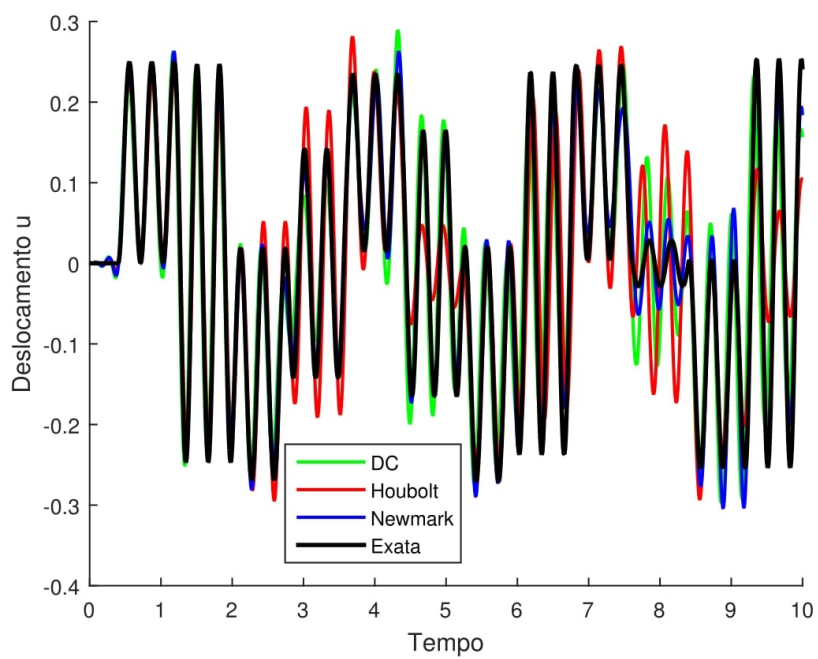


Figura 6.3: Comparação no tempo para $w = 20$

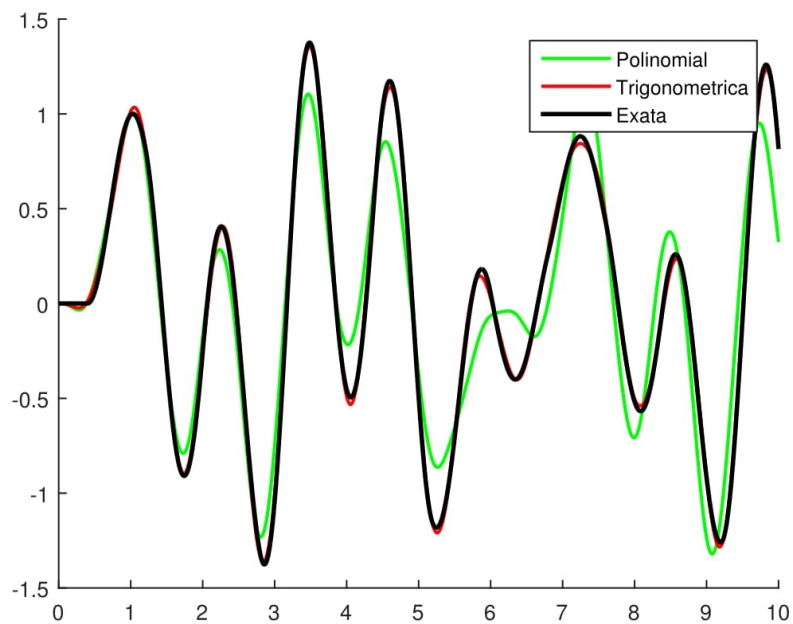


Figura 6.4: Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 5$, $p = 3$

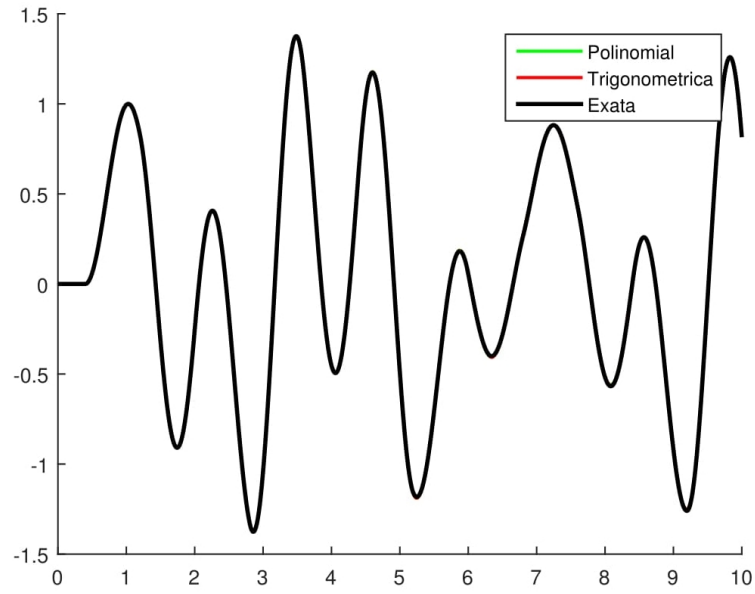


Figura 6.5: Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 5$, $p = 10$

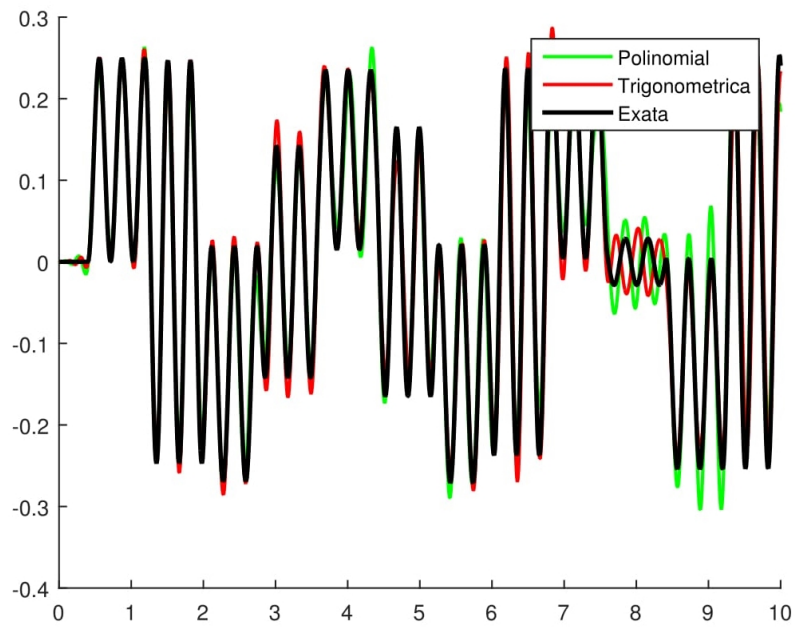


Figura 6.6: Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 20$, $p = 10$

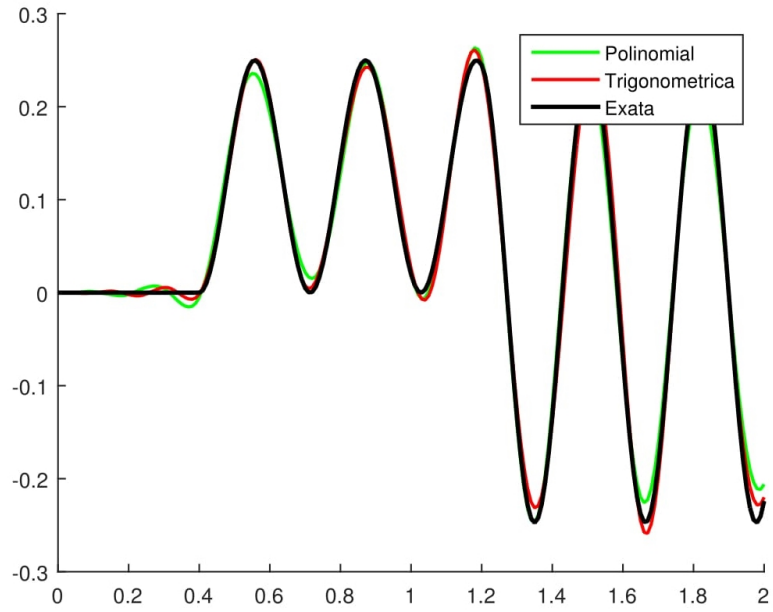


Figura 6.7: Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 20$, $p = 10$, $t = 2s$

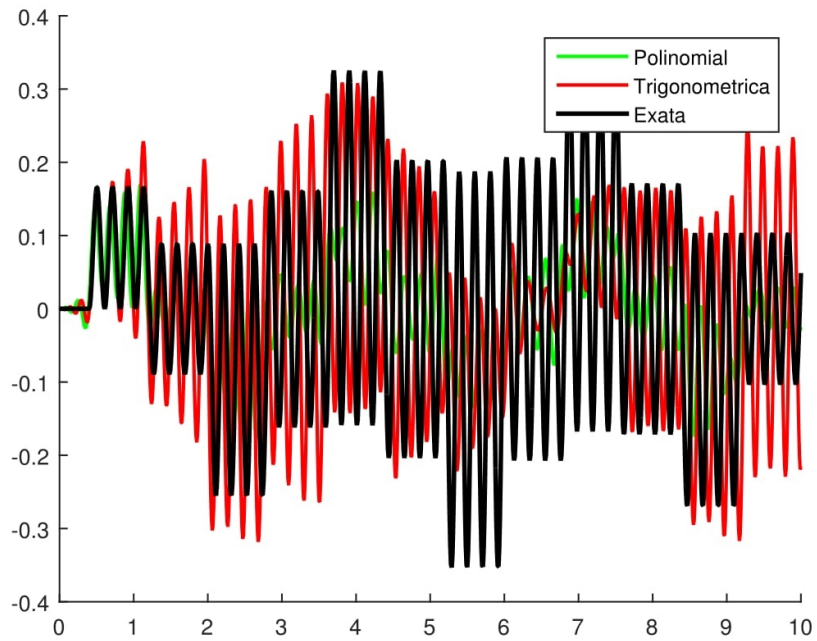


Figura 6.8: Comparação das funções $\varphi(x)$ para $w = 30$, $p = 10$

7 CONCLUSÕES

O principal enfoque desse trabalho foi mostrar a solução analítica do problema (4.1) de forma detalhada, diferente do trabalho [20]. A solução do problema (2.1) é encontrada no trabalho [13], apresentado no XIX ENMC em 2016. Na seção 6.1 foi validada a solução analítica do problema (4.1) levando em consideração os métodos aproximados também estudados nesse trabalho.

É importante observar que para o problema (4.1), foi realizado a comparação usando-se o Método de Galerkin devido a condição de Contorno de Neumann (4.5). Para o problema (2.1) é usado o Método das Diferenças Finitas [13], devido a condição de contorno de Dirichlet (2.5).

Além desse estudo, foram realizados mais dois estudos, sendo estes; com relação aos métodos de integração no tempo, vistos aqui três deles: Método da diferença central, Método de Houbolt e Método de Newmark; e com relação aos conjuntos de funções usadas no Método de Galerkin, sendo estes: conjunto de funções polinomiais e trigonométricas.

Para o problema estudado (4.1) com relação aos métodos de integração no tempo o Método de Newmark apresentou solução mais próxima da analítica mesmo com frequência de excitação tendo valor mais alto, o Método da Diferença Central também conseguiu apresentar um bom resultado, tendo em vista que em alguns intervalos de tempo específico apresentou resultado até melhor que o Método de Newmark para um valor alto de frequência de excitação.

No caso dos conjuntos de funções para o Método de Galerkin é perceptível que as funções trigonométricas apresentaram melhor resultado com uma quantidade bem menor de funções, os dois conjuntos só apresentaram resultados bem próximos quando foi aumentado a quantidade de funções usada nos conjun-

tos, o que pode ter um custo computacional maior. É possível ver um estudo mais detalhado sobre esses conjuntos de funções nos trabalhos [18, 19].

Tendo em vista todo o estudo realizado, temos que os resultados no qual chegamos, feito a comparação com os métodos numéricos, nos levaram a concluir que as soluções analíticas de referência dos problemas propostos são de grande utilidade como soluções suportes para realizar análise e comparação de métodos numéricos unidimensionais com precisão.

Referências Bibliográficas

- [1] AMES, W. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, Orlando, 1977.
- [2] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [3] BEZERRA, B. A. F. *Detecção de vazamentos em tubulações de gás pelo método de transitório de pressão utilizando CLP e sensores*. Monografia apresentada a Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do Certificado de Especialista em Engenharia de Instrumentação, Recife, 2008.
- [4] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*, 9th ed. Brooks/Cole, 2010.
- [5] BYRON, F. W., AND FULLER, R. W. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Publications, New York, 1992.
- [6] CLOUGH, R., AND PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [7] COLOMBAROLI, P. L. S. *Sistema de Detecção de Vazamento em Dutos de Petróleo*. PRH16-ANP/MCT - UNIFEI, Itajubá, 2009.
- [8] CONITEC. *Elastografia hepática ultrassônica no diagnóstico da fibrose hepática*. Relatório de Recomendação, Ministério da Saúde, nº 170, Setembro, Brasília, 2015.
- [9] DUFFY, D. G. *Advanced Engineering Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, 1998.

- [10] HUGHES, T. J. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, vol. 1. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [11] KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 9th ed. John Wiley & Sons, 2006.
- [12] LEVEQUE, R. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM, Philadelphia, 2007.
- [13] LIMA, R. S., DE SÁ, R. R. M., AND TORII, A. J. *Uma Solução de Referência para a Equação da Onda Unidimensional*. Proceedings of XIX ENMC - National Meeting on Computational Modeling and VII ECTM - Meeting on Materials Science and Technology, João Pessoa, 2016.
- [14] MATLAB. *version 8.5.0.197613 (R2015a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2015.
- [15] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, Tokio, 1975.
- [16] PINCHOVER, Y., AND RUBINSTEIN, J. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [17] TORII, A., AND MACHADO, R. The application of the generalized finite element method to forced dynamic structural analysis of beams and frames. In *CILAMCE 2011* (Ouro Preto, 2011). Paper accepted for publication.
- [18] TORII, A., AND MACHADO, R. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. In *Latin American Journal of Solids and Structures* (São Paulo, 2012), M. Alves and H. da Costa, Eds., vol. 9 of *Structural Mechanics (P)*, pp. 309–337.

- [19] TORII, A., MACHADO, R., AND ARNDT, M. Gfem for modal analysis of 2d wave equation. In *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software* (2015), vol. 32, Emerald Group Publishing Limited, pp. 1779–1801.
- [20] TORII, A. J. *Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado*. Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Área de Concentração: Mecânica Computacional., Curitiba, 2012.
- [21] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: The Basis*, 5th ed., vol. 2. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

8 APÊNDICE

8.1 Implementação das Soluções Analíticas

8.1.1 Solução Analítica Neumann

```
1 %%  
2 %L - tamanho do comprimento em X  
3 %PHI - Frequencia de oscilacao  
4 %c - velocidade de propagacao  
5 %x - vetor de pontos do dominio  
6 %t - vetor de tempos  
7  
8 function U=sol_exa_neu(L,PHI,c,x,t)  
9 n = 4000;  
10 U = zeros(size(x,2),size(t,2));  
11  
12 for i=1:length(t)  
13     tempo = t(i);  
14     V1_x_t = zeros(1, size(x,2));  
15     V2_x_t = zeros(1, size(x,2));  
16     for j=1:n  
17         Kn = ( pi/(2*L) )*(2*j - 1);  
18         An = ( 1/((Kn^2)*L) )*2*((-1)^(j-1));  
19         Cn = (-PHI/(c*Kn))*An;  
20         argx = Kn*x;  
21         argt = Kn*c*tempo;  
22         %Solucao do Problema A  
23         V1_x_t = V1_x_t + Cn*( sin(argx).*sin(argt) );
```



```

24      %Solucao do Problema B
25      C1 = (-(PHI^3)*An)/( ((Kn*c)^3)-( (PHI^2)*Kn*c ) );
26      Bn_t = C1*sin( argt ) + ( An*(PHI^2)*sin( PHI*tempo ) )
          /( ((Kn*c)^2)-PHI^2 );
27      V2_x_t = V2_x_t + Bn_t*sin( argx );
28  end
29  %Solucao do Problema Original
30  U(:,i) = V1_x_t + V2_x_t + x.*( sin( PHI*tempo ) );
31 end
32 end

```

8.1.2 Solução Analítica Dirichlet

```

1  function U=sol_exa(L,PHI,c,x,t)
2  n = 4000;
3  U = zeros( size(x,2), size(t,2) );
4
5  for i=1:length(t)
6      tempo = t(i);
7      V1_x_t = zeros(1, size(x,2));
8      V2_x_t = zeros(1, size(x,2));
9      for j=1:n
10         bn = ( (2*L)/(j*pi) )*(-1)^(j+1);
11         Cn = (-PHI/(c*j*pi))*bn;
12         argx = (j*pi*x)/L;
13         argt = (c*j*pi*tempo)/L;
14         %Solucao do Problema A
15         V1_x_t = V1_x_t + Cn*( sin( argx ).* sin( argt ) );
16         %Solucao do Problema B

```

```

17         aux = c*j*pi;
18         K2 = (-(L^2)*(PHI^3)*bn)/( ((aux)^3)-(L^2)*(PHI^2)
           *aux ) );
19         Bn_t = K2*sin( argt ) + ( L*(PHI^2)*bn*sin(PHI*tempo)
           )/( (aux^2)-(L*PHI)^2 );
20         V2_x_t = V2_x_t + Bn_t*sin( argx );
21     end
22     %Solucao do Problema Original
23     U(:,i) = V1_x_t + V2_x_t + x.*(sin(PHI*tempo)/L);
24 end
25 end

```